NÚMEROS COMPLEJOS

INTRODUCCIÓN:

En el campo de los números reales existen ciertos problemas que no tienen solución. Por ejemplo, no existe un número real x, cuyo cuadrado sea igual a -1, es decir, la ecuación $x^2 = -1$ no tiene solución en R.

El problema se solucionó con la creación de un número que no es real (unidad imaginaria), y que cumple con la siguiente propiedad:

$$i \cdot i = i^2 = -1 \qquad \text{donde } i \text{ : unidad imaginaria.}$$

DEFINICIÓN:

Número complejo: es toda expresión de la forma $a + bi$ (forma canónica), con a, b números reales e i unidad imaginaria. También podemos decir que un número complejo es un par ordenado de números reales (a, b) donde a es la parte real y b es la parte imaginaria.

El conjunto de los números complejos lo simbolizamos por C y cada número complejo por la letra z.

Ejemplos:

1) $z_1 = 2 + 5i \rightarrow a = 2 , b = 5.$
2) $z_2 = -1 - 2i \rightarrow a = -1, b = -2.$
3) $z_3 = -4i \rightarrow a = 0, b = -4.$
4) $z_4 = 2 = 2 + 0i \rightarrow a = 2, b = 0.$

El conjunto de los números complejos se representa por:

$$C = \{z = a + bi = (a, b) \ /a \in R, b \in R \}$$

Si $z = a + bi$ y pertenece al conjunto de los números Complejos, "a" se llama parte real del complejo z y se denota por $\mathrm{Re}(z)$ y "b" se llama parte imaginaria del complejo z y se denota por $\mathrm{Im}(z)$.

Ejemplos:

1) $z_1 = -5 + 3i \rightarrow Re\ z = -5\ y\ Im\ z = 3.$
2) $z_2 = -i = 0 + (-1)i \rightarrow Re\, z = 0\ y\ Im\ z = -1.$
3) $z_3 = -2\sqrt{11} = -2\sqrt{11} + 0i = \rightarrow Re\ z = -2\sqrt{11},\ Im\ z = 0.$

Observaciones:

1) Un número complejo cuya parte real es igual a cero, se llama **complejo imaginario puro.**

Ejemplo: $z = -4i = 0 + (-4)i \quad \rightarrow \quad Re\, z = 0, \;\; Im\, z = \; -4$

2) Un número complejo cuya parte imaginaria es igual a cero, se llama **complejo real.**

Ejemplo: $z = -1 = -1 + 0i \;\; \rightarrow \;\; Re\, z = -1, \;\; Im \;\, z = 0.$

Luego, todo número real podemos escribirlo como $a + bi$, lo que significa que todo número real pertenece a C, es decir: R es subconjunto de C.

<u>IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS:</u>

Dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son iguales entre si sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales:

$$z_1 = z_2 \quad \leftrightarrow \quad a = c \quad y \quad b = d$$

<u>COMPLEJOS CONJUGADOS</u>

Dos números complejos son conjugados si y sólo si se diferencian solamente en el signo de la parte imaginaria.

Los complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = a - bi$, son complejos conjugados.

Notación: Si $z = c + di$, entonces el conjugado de z se representa por $\bar{z}$ y el número complejo $\bar{z} = c - di$.

Ejemplo: Sea z = -5 – 3i entonces su conjugado es $\bar{z} = -5 + 3i$

a) z_1 = – 1 – 2 i $\qquad$ $\overline{z_1}$ = – 1 + 2 i

b) z_2 = 4 i $\qquad$ $\overline{z_2}$ = – 4 i

c) z_3 = 6 $\qquad$ $\overline{z_3}$ = 6

Propiedades del conjugado

Sean z y w dos números complejos, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\overline{\overline{z}} = z \quad \Rightarrow$ El conjugado del conjugado de z es z.

2) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \Rightarrow$ El conjugado de una suma es igual a la suma de los conjugados de los sumandos.

3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \Rightarrow$ El conjugado de un producto es igual al producto de los conjugados de los factores.

4) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, \quad w \neq (0,0) \quad \Rightarrow$El conjugado del cuociente es igual al cuociente de los conjugados.

<u>OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS</u>

a) **ADICIÓN:** La adición de números complejos se define de la siguiente forma:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}) + (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{di}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d})\boldsymbol{i}$$

Ejemplo: $z_1 = 5 - 3i,\ z_2 = -4 + i$. Luego $z_1 + z_2 = (5-4) + (-3+1)i = 1 - 2i$

Propiedades de la adición en $\boldsymbol{C}$.

La adición en C cumple con las siguientes propiedades:

I) Clausura: $\forall\ z_1, z_2 \in C,\ (z_1 + z_2) \in C$.

II) Asociatividad: $\forall\ z_1, z_2,\ z_3 \in C,\ z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.

III) Elemento Neutro: $\exists\ 0 = 0 + 0i\ \in C, \forall\ z\ \in C, 0 + z = z + 0 = z$.

IV) Elemento Inverso aditivo: $\forall\ z \in C, \exists\ (-z)\ \in C, z + (-z) = (-z) + z = 0$.

V) Conmutatividad: $\forall\ z_1,\ z_2 \in C,\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

$\therefore$ Por cumplir con las propiedades anteriores, $(C, +)$ tiene estructura algebraica de **Grupo Abeliano.**

SUSTRACCIÓN DE DOS COMPLEJOS:

La sustracción de números complejos se define mediante el inverso aditivo.

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

Ejemplo: $z_1 = 2 + 5i \quad z_2 = -3 - 2i$. Luego:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) &= (2 + 5i) + \big(-(-3 - 2i)\big) \\ &= (2 + 5i) + (3 + 2i) \\ &= (2 + 3) + (5 + 2)i \\ &= 5 + 7i \end{aligned}$$

PROPIEDADES:

(1) La suma de un número complejo con su conjugado es siempre un número real.

EJERCICIOS:

1) Si $z_1 = a - 5i$, $z_2 = 3 - bi$ y $z_3 = \frac{1}{3} - i$, tales que $z_1 + z_2 = \overline{z_3}$, determine $a\ y\ b$.

2) Dado el complejo $z_1 = 7 - 3i$, determine un complejo z_2 tal que: $\overline{z_1 + z_2} = -\overline{z_1}$.

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS:

La multiplicación de números complejos se define de la siguiente manera:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Ejemplo: Multiplique $(8+5i)(4+7i)$

$$\begin{aligned}(8+5i)(4+7i)&=(8\cdot 4-5\cdot 7)+(8\cdot 7+5\cdot 4)i\\&=(32-35)+(56+20)i\\&=-3+76i\end{aligned}$$

Propiedades de la multiplicación en C

La multiplicación en C cumple con las siguientes propiedades:

I) Clausura: $\forall\, z_1, z_2 \in C,\ (z_1\cdot z_2)\in C$.

II) Asociatividad: $\forall\, z_1, z_2,\ z_3\in C,\ z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$.

III) Elemento Neutro: $\exists\,(1+0i)\in C, \forall\ z\in C, z\cdot(1+0i)=(1+0i)\cdot z=z$.

IV) Elemento Inverso multiplicativo

$\forall\, z\in C,\ z\neq 0,\ \exists\ z^{-1}\in C, z\cdot z^{-1}=z^{-1}\cdot z=1+0i$. Con $z^{-1}=\frac{1}{z}$.

z^{-1}, expresado en la forma $a+bi$ es igual a:

$$z^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$$

- a y b no pueden ser ambos iguales a cero.
- $z=0+0i$ no tiene inverso multiplicativo.

Ejemplo:

Si $z=4+3i$, entonces $z^{-1}=\frac{4}{4^2+3^2}+\frac{-3}{4^2+3^2}i=\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i$

V) Distributividad: $\forall\, z_1, z_2, z_3\in C, z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$

OBSERVACIONES:

1) Las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 = -a$, con a un número real positivo, las escribiremos como:

$$x_1 = \sqrt{-a} \qquad y \qquad x_2 = -\sqrt{-a}$$

Estas soluciones corresponden a los números complejos:

$$x_1 = i\sqrt{a} \quad y \quad x_2 = -i\sqrt{a}$$

Ejemplos:

a) $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot -1} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i.$
b) $\sqrt{-7} = \sqrt{7 \cdot -1} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{7}i.$
c) $\sqrt{-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot -1} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{-1} = \frac{1}{2}i.$

La propiedad de multiplicación de raíces de igual índice, válida para raíces aritméticas, **NO** se cumple para raíces cuadradas de números reales negativos.

Ejemplo: Si al producto $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-4}$, aplicamos la propiedad mencionada, obtenemos:

(1) $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-4} = \sqrt{(-4)(-4)} = \sqrt{16} = 4$

Por otra parte:

(2) $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-4} = 2i \cdot 2i = 4i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$

Luego, hay una contradicción, ya que se obtienen dos resultados distintos. Por lo tanto, la propiedad no es válida y el desarrollo correcto es el (2).

2) Dados los complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, se cumple la siguiente propiedad.

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

3) El producto de un número real por su conjugado es número real:

Si $z_1 = a + bi$, entonces $\bar{z} = a - bi$, $a, b \ \in R$

Luego: $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi)$ suma por su diferencia

$$
\begin{aligned}
z \cdot \bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\
&= a^2 - (bi)^2 \\
&= a^2 - b^2 i^2 \\
&= a^2 - b^2 \cdot (-1) \\
&= a^2 + b^2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, como $a \ \ y \ b \ \in R$. Entonces $(a^2 + b^2) \ \in R$.

EJERCICIO:

Dados $z_1 = 4 - 3i$ y $z_2 = 1 + 5i$, encuentre un complejo z tal que: $z_1 \cdot z = z_2$

DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

La división de números complejos se define mediante el inverso multiplicativo.

$$z_1 : z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1}; \text{ con } z_2 \neq 0$$

Ejemplo:

Divida: $(1+i) : (1-i) = (1+i) \cdot (1-i)^{-1} = \frac{1+i}{1-i}$

El conjugado de $1-i$ es $1+i$, luego:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+2i+i^2}{1-(-1)} = \frac{1+(-1)+2i}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$$

POTENCIAS DE i

Las potencias de exponente natural y base la unidad imaginaria se definen de igual forma que las potencias de base real y exponente natural:

$$i^n = \underbrace{i \cdot i \cdot i \cdot \ldots \cdot i}_{n \ \ veces}$$

Estas potencias cumplen las mismas propiedades que las potencias de base real y exponente natural.

Ejemplos:

$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$
$i^9 = i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i$
$i^{10} = i^9 \cdot i = i \cdot i = -1$
$i^{11} = i^{10} \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^{12} = i^{11} \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$

En los ejemplos se observa lo siguiente:

- Si $n = 1, 5, 9, \ldots$ entonces $i^n = i$.

Los números 1, 5, 9,… son naturales de la forma $4n - 3$, con $n \in N$.

- Si $n = 2, 6, 10, \ldots$ entonces $i^n = -1$.

Los números 2, 6, 10, … son naturales de la forma $4n - 2$, con $n \in N$.

- Si $n = 3, 7, 11, \ldots$ entonces $i^n = -i$

Los números 3, 7, 11, … son naturales de la forma $4n - 1$, con $n \in N$.

- Si $n = 4, 8, 12, \ldots$ entonces $i^n = 1$

Los números 4, 8, 12,… son de la forma $4n$, $n \in N$.

Por lo tanto, el valor de i^n varía en forma cíclica y en general se tiene lo siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{c} i^{(4n-3)} = i \\ i^{(4n-2)} = -1 \\ i^{(4n-1)} = -i \end{array}}$$

Recuerda:

- Si el resto es 0 entonces es igual a 1.
- Si el resto es 1 entonces es igual a i.
- Si el resto es 2 entonces es igual a -1
- Si el resto es 3 entonces es igual a -i

Definiciones:

a) $i^0 = 1$

b) $i^{-n} = \frac{1}{i^n}$, $n \in N$, i: unidad imaginaria.

Ejemplo: $\boldsymbol{i^{-45}} =$

Observación: Las propiedades de potencias de base real y exponente entero son válida para las potencias de exponente entero y base la unidad imaginaria.

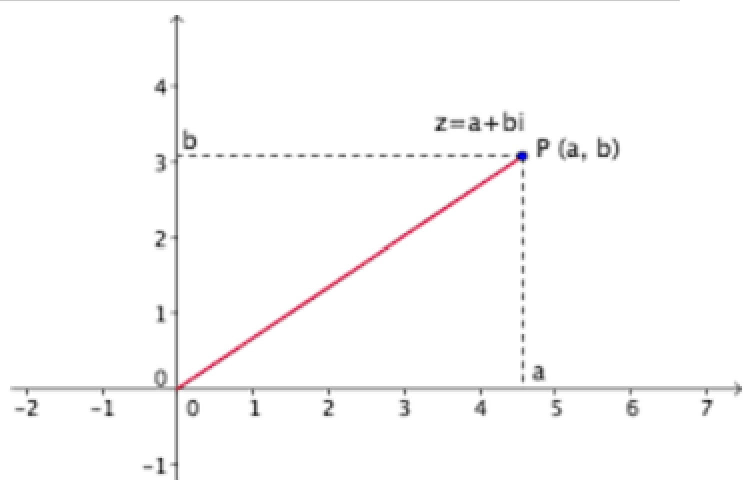
Desafío: Demuestre que $i^{4n-3} = i$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN NÚMERO COMPLEJO:

Geométricamente el conjunto de los números complejos representa el plano cartesiano. Existe una relación única entre los elementos del conjunto C y el conjunto de puntos del plano. En C se llama , plano de Argand.

En el eje de abscisas (el de las X), se representa la componente Real y en el eje de las ordenadas (Y) se representa la imaginaria.

El punto (a,b) determina con el origen de coordenadas de un vector, al que llamaremos Vector posición del número complejo $a+bi$



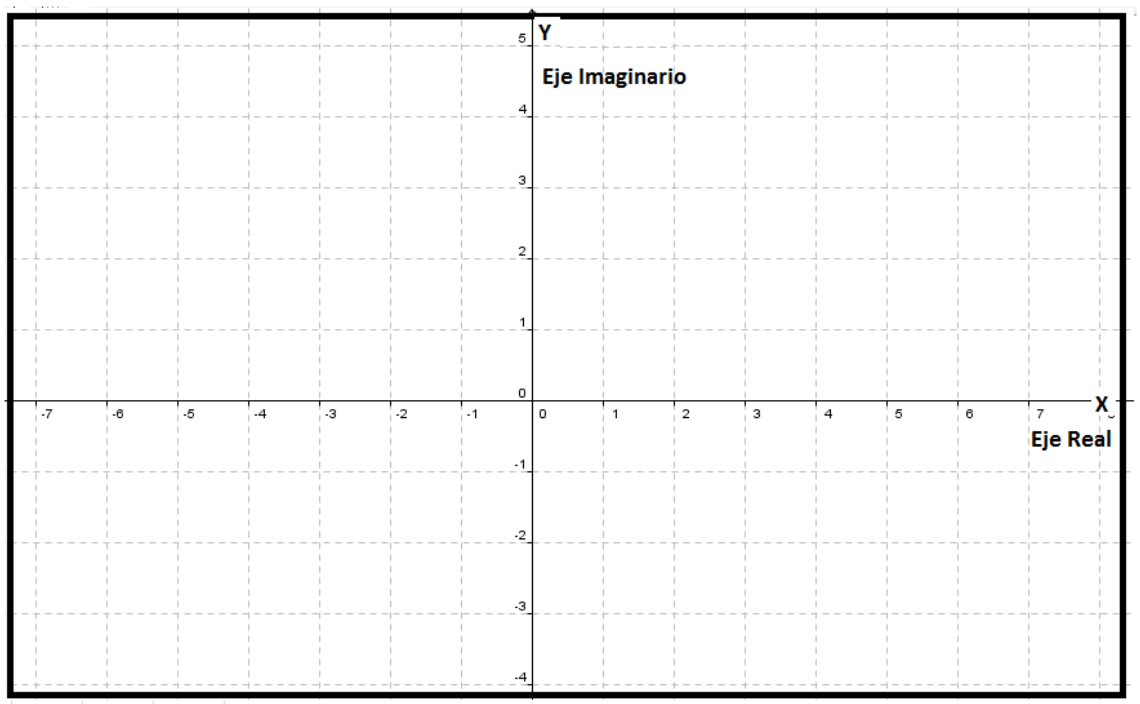
Sea $z = (a,b) \in C$

- Si b = 0, entonces el complejo z es de la forma (a,0) y se asimila que al número real "a" geométricamente se representa en el eje horizontal.
- Si a = 0, entonces el complejo z es de la forma (0,b) y decimos que es un imaginario puro. Se representa geométricamente en el eje vertical.

Ejercicio: Representar los siguientes números complejos:

a) $z_1 = -4 + 4i$ b) $z_2 = -3 + 2i$ c) $z_3 = 2 - 2i$

d) $z_4 = 3i$ e) $z_5 = 2$ f) $z_6 = 6 + 4i$

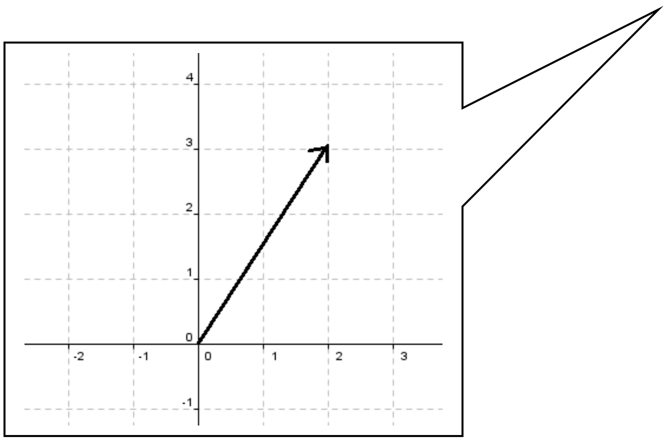


MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO:

Sea $z = a + bi$ un número complejo.

Se llama módulo o valor absoluto de z al número real $|z|$ definido por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Es decir, corresponde a la longitud (medida) del vector posición.

Ejemplo: Si $z = 2 + 3i$. Determine $|z|$ = $\sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$



Propiedades del módulo de un complejo:

Sean z y w dos números complejos, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$ $\Rightarrow$ El valor absoluto de un complejo es igual al valor absoluto de su inverso aditivo y de su conjugado.

2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ $\Rightarrow$El valor absoluto de un producto de complejos es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

3) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},\ w \neq (0,0)$ $\Rightarrow$El valor absoluto de un cociente de números complejos es igual al cociente de los valores absolutos de los números.

4) $|z + w| \leq |z| + |w|$ $\Rightarrow$ El valor absoluto de una suma de números complejos es menor o igual a la suma de los valores absolutos de los números complejos. (Desigualdad triángular)

EJERCICIO:

I) Determine el módulo de los siguientes vectores:

1) $z_1 = 4 + i$

2) $z_2 = -3 - 5i$

3) $z_3 = 3 - 3i$

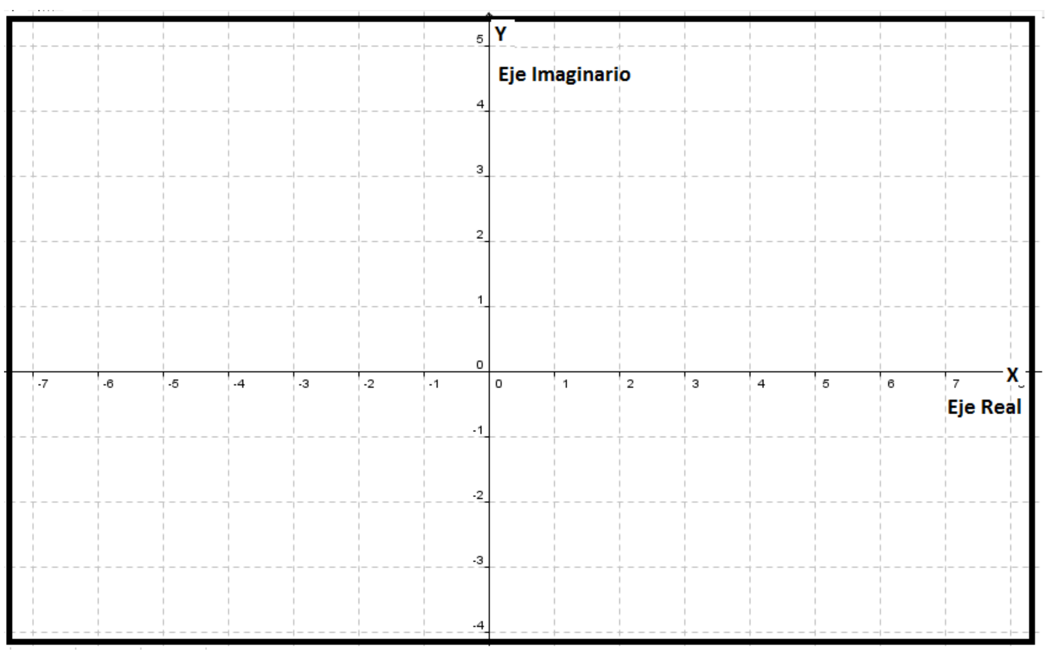
II) Hallar el conjugado de los siguientes números complejos.

1) $z_1 = 4 + i$

2) $z_2 = -3 - 5i$

3) $z_3 = 3 - 3i$

III) Grafique todos los números complejos del ejercicio I y II)



Observación: Un número complejo y su conjugado, son simétricos con respecto al eje REAL.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1) Hallar x e y sabiendo que: $(x,3)+(y,5)=(3,8)$ y $(1,2x)+(y,y+1)=(3,5)$.

2) Hallar el número complejo $(x+yi)$ tal que: $(x+yi)(3+i)=1+2i$

3) ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $(2,i)$?

4) Determinar z, tal que $\frac{z}{2-i}=3+2i$

5) Calcular $\frac{3+4i}{5+i}$

6) Encontrar las 4 raíces de $x^4 - 16 = 0$.

EJEMPLOS PSU DE NÚMEROS COMPLEJOS:

1) Si $z = 3 - 4i$, entonces $|z| \cdot (\bar{z})^2$ es igual a:

   A) $-35 + 120i$
   B) $-7 + 24i$
   C) $15 + 20i$
   D) $45 - 80i$
   E) $-125 - 600i$

2) Sean p y q dos números complejos. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

   I) Si el módulo de p es igual al módulo de q, entonces p es igual a q.
   II) Si la parte real de p y q es 0, entonces $p \cdot q$ es un número real.
   III) Si p es el conjugado de q, entonces $(p + q)$ es un número real.

   A) Sólo I
   B) Sólo I y II
   C) Sólo I y III
   D) Sólo II y III
   E) I, II y III

3) Para cualquier complejo no nulo $z = a + bi$, su recíproco z^{-1} es igual a:

A) $a - bi$
B) $\frac{a-bi}{a+b}$
C) $\frac{a+bi}{a-b}$
D) $\frac{a-bi}{a^2+b^2}$
E) $\frac{a+bi}{a^2+b^2}$

4) Si el número complejo w, tiene $\overline{w}$ como su conjugado y $|w|$ como su módulo, entonces el número real x que verifica la ecuación $|w| - xi = 3(1 - i \cdot w \cdot \overline{w})$ es:

A) 3
B) 9
C) 27
D) 81
E) 243

5) Simplifique la siguiente expresión: $\frac{1+i}{2-i}$

A) $0{,}2 + 0{,}6i$
B) $0{,}2 - 0{,}4i$
C) $0{,}6 + 0{,}6i$
D) $0{,}4 - 0{,}6i$
E) $0{,}4 + 0{,}4i$

6) Se tienen dos números complejos, $A = (1 - 2i)$ y $B = (3 + xi)$. ¿Cuánto vale x si la distancia entre ellos es 2?

   A) 2
   B) 1
   C) 0
   D) -1
   E) -2

7) Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tal que a, b y c son números reales, con $a \neq 0$ y $a(2 - 3i)^2 + b(2 - 3i) + c = 0$, donde $(2 - 3i)$ es un número complejo. El producto de las soluciones es:

   A) 13
   B) $-5 - 12i$
   C) $13 - 12i$
   D) -5
   E) Indeterminable con los datos dados.